Propiedades Rotacionales y Traslacionales de Campos Tensoriales en Mecánica Cuántica Relativista

Valeriy V. Dvoeglazov y J. Irvin Guerrero Ibarra

Unidad Académica de Física, Universidad Autónoma de Zacatecas
Apartado Postal C-580, 98060 Zacatecas, Zac. México.

E-mail: jose.guerrero@fisica.uaz.edu.mx, valeri@fisica.uaz.edu.mx

1 Resumen.

Se han publicado varias discusiones sobre las posibles observaciones de los campos 4-vectores. Nosotros estudiamos la forma general de las ecuaciones de movimiento así como los invariantes dinámicos en base al teorema de Noether, reexaminamos la teoría de los campos ATS y de los potenciales 4-vectores y estudiamos los limites sin masa. Las motivacióńes teóricas serían las antiguas publicaciones de Ogievetskii y Polubarinov así como las de Kalb y Ramond. Ogievetskii propuso el concepto del Notof, cuyas propiedades de helicidad son complementarias a las del fotón. Analizamos la teoría cuántica de campos tomando en cuenta la dimension de masa del notof y del fotón. Es posible describir los grados de libertad del notof y del fotón en base al formalismo modificado de Bargmann-Wigner para espinores simétricos de segundo rango. Después, procedemos a derivar las ecuaciones para el tensor simétrico de segundo rango en base al formalismo Bargmann-Wigner. El multiespinor simétrico de cuarto rango es utilizado. Generalizamos, y obtuvimos las ecuaciones relativistas para spin-2, que son consistentes con la relatividad general.

2 Teorema de Noether.

A cada transformación continua de N variables y funciones de campo que deja invariante la acción expresada como integral en un volumen cuadrimensional le corresponde N invariantes dinámicas, por ejemplo, una corriente conservada j^μ que cumple $\partial_\mu j^\mu = 0$. Para demostrar esto denotamos una variación δ en las coordenadas y en las cantidades de campo

$$\psi'(x) = \psi(x) + \delta\psi(x), \quad x'^\mu = x^\mu + \delta x^\mu. \tag{1}$$

Comenzamos diciendo que la acción es invariante

$$\int L'\left\{\psi'^\alpha, \psi'^\alpha_{,\mu}, x'^\mu\right\} d'x = \int L\left\{\psi^\alpha, \psi^\alpha_{,\mu}, x^\mu\right\} dx \tag{2}$$

$d'x = Jdx$ donde $J \sim 1 + \partial_\lambda \delta x^\lambda$ es el Jacobiano. Con esto podemos definir $\delta S = S' - S$

$$\delta S = \int_R \left[L_\alpha \delta\psi^\alpha - \partial_\mu L^\mu_\alpha \delta\psi^\alpha + \partial_\mu\left(L^\mu_\alpha \delta\psi^\alpha\right)\right] dx \tag{3}$$

tras unos cuantos pasos meramente algebraicos obtenemos

$$\delta S = \int_R \Lambda_\alpha \delta\psi^\alpha dx + \int_B d\sigma_\mu \left[L^\mu_\alpha \delta\psi^\alpha + L\delta x^\mu\right]. \tag{4}$$

Donde $\Lambda_\alpha = \partial L/\partial\psi^\alpha - \partial_\mu\left(\partial L/\partial\psi^\alpha_{,\mu}\right) = 0$. Por ejemplo, para variaciones tipo traslacional, al sumar y restar el término dentro del integrando obtenemos

$$\delta S = \int_R \partial_\mu\left[L^\mu_\alpha \delta\psi^\alpha + \left(g^\nu_\mu L - \psi^\alpha_{,\nu} L^\mu_\alpha\right)\delta x^\nu\right] dx \tag{5}$$

con esto obtenemos j^μ con θ^μ_ν siendo el tensor energía-momento, por lo que llegamos a la ley de conservación.

3 Formalismo Bargmann-Wigner.

Repitiendo el procedimiento de Bargmann-Wigner para obtener las ecuaciones para bosones con espin 0 y 1. Las ecuaciones básicas son

$$\left[i\gamma^\mu\partial_\mu - m\right]_{\alpha\beta}\Psi_{\beta\gamma}(x) = 0 \tag{6}$$
$$\left[i\gamma^\mu\partial_\mu - m\right]_{\gamma\beta}\Psi_{\alpha\beta}(x) = 0 \tag{7}$$

Expandiendo la función de campo en las partes antisimétricas y simétricas

$$\Psi_{[\alpha\beta]} = R_{\alpha\beta}\phi + \gamma^5_{\alpha\delta}R_{\delta\beta}\widetilde{\phi} + \gamma^5_{\alpha\delta}\gamma^\mu_{\delta\tau}R_{\tau\beta}\widetilde{A}_\mu \quad , \tag{8}$$
$$\Psi_{\{\alpha\beta\}} = \gamma^\mu_{\alpha\delta}R_{\delta\beta}A_\mu + \sigma^{\mu\nu}_{\alpha\delta}R_{\delta\beta}F_{\mu\nu} \quad , \tag{9}$$

donde $R = CP$. Las ecuaciones (8,9) llevan al juego de ecuaciones de Kemmer para s=0:

$$m\phi = 0 \quad , m\widetilde{\phi} = -i\partial_\mu\widetilde{A}^\mu \quad , m\widetilde{A}^\mu = -i\partial^\mu\widetilde{\phi} \quad , \tag{10}$$

y las ecuaciones Proca-Duffin-Kemmer para el caso s=1:

$$\partial_\alpha F^{\alpha\mu} + \frac{m}{2}A^\mu = 0 \quad , \tag{11}$$
$$2mF^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu \quad . \tag{12}$$

El campo cuantizado de "potencial" es

$$A^\mu(x^\mu) = \sum_{\sigma=0,\pm1}\int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_p}\left[\epsilon^\mu(\mathbf{p},\sigma)a(\mathbf{p},\sigma)e^{-ip\cdot x} + (\epsilon^\mu(\mathbf{p},\sigma))^c b^\dagger(\mathbf{p},\sigma)e^{+ip\cdot x}\right]. \tag{13}$$

Para obtener estados transversales hay que utilizar relaciones entre $F^{\mu\nu}$ y el 4-potencial.

4 Lagrangiano, Tensor de energía-momento y Momento Angular.

Comenzando con el Lagrangiano, incluyendo, en general, el término de masa

$$\mathcal{L} = \frac{1}{4}(\partial_\mu A_{\nu\alpha})(\partial^\mu A^{\nu\alpha}) - \frac{1}{2}(\partial_\mu A^{\mu\alpha})(\partial^\nu A_{\nu\alpha}) - \frac{1}{2}(\partial_\mu A_{\nu\alpha})(\partial^\nu A^{\mu\alpha}) + \frac{1}{4}m^2 A_{\mu\nu}A^{\mu\nu}. \tag{14}$$

y la ecuación de movimiento resultante es

$$\frac{1}{2}(\Box + m^2)A_{\mu\nu} + (\partial_\mu A_{\alpha\nu}{}^{,\alpha} - \partial_\nu A_{\alpha\mu}{}^{,\alpha}) = 0 \quad , \tag{15}$$

donde $\Box = -\partial_\alpha\partial^\alpha$. Y siguiendo el método de Noether obtenemos el tensor energía momento:

$$\Theta^{\lambda\beta} = \tfrac{1}{2}\Big[(\partial^\lambda A_{\mu\alpha})(\partial^\beta A^{\mu\alpha}) - 2(\partial_\mu A^{\mu\alpha})(\partial^\beta A^\lambda_\alpha) - 2(\partial^\mu A^{\lambda\alpha})(\partial^\beta A_{\mu\alpha})\Big] - \mathcal{L}g^{\lambda\beta}. \tag{16}$$

Y para rotaciones, los generadores de transformaciones infinitesimales se define como

$$\mathcal{T}^{\alpha\beta,\mu\nu}_{\kappa\tau} = \frac{1}{2}g^{\alpha\mu}(\delta^\beta_\kappa\,\delta^\nu_\tau - \delta^\beta_\tau\,\delta^\nu_\kappa) + \frac{1}{2}g^{\beta\mu}(\delta^\nu_\kappa\delta^\alpha_\tau - \delta^\nu_\tau\,\delta^\alpha_\kappa) + \frac{1}{2}g^{\alpha\nu}(\delta^\mu_\kappa\,\delta^\beta_\tau - \delta^\mu_\tau\,\delta^\beta_\kappa) + \frac{1}{2}g^{\beta\nu}(\delta^\alpha_\kappa\,\delta^\mu_\tau - \delta^\alpha_\tau\,\delta^\mu_\kappa) \tag{17}$$

La formula relativista para el tensor de spin es:

$$J_{\kappa\tau} = \int d^3\mathbf{x}\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial A^{\alpha\beta}/\partial t)}\mathcal{T}^{\alpha\beta,\mu\nu}_{\kappa\tau}A_{\mu\nu}\right] \quad , \tag{18}$$

donde como resultado obtenemos

$$J_{\kappa\tau} = \int d^3\mathbf{x}\,\big[(\partial_\mu A^{\mu\nu})(g_{0\kappa}A_{\nu\tau} - g_{0\tau}A_{\nu\kappa}) - (\partial_\mu A^\mu_\kappa)A_{0\tau} + (\partial_\mu A^\mu_\tau)A_{0\kappa} + A^\mu{}_\kappa(\partial_0 A_{\tau\mu} + \partial_\mu A_{0\tau} + \partial_\tau A_{\mu0}) - A^\mu{}_\tau(\partial_0 A_{\kappa\mu} + \partial_\mu A_{0\kappa} + \partial_\kappa A_{\mu0})\big]. \tag{19}$$

Después de escoger un vector de genero espacial ($n^\mu n_\mu = -1$) podemos encontrar la forma explicita del vector Pauli-Lubanski.

$$(W_\mu \cdot n^\mu) = -(\mathbf{W}\cdot\mathbf{n}) = -\tfrac{1}{2}\epsilon^{ijk}n^k J^{ij}p^0 \tag{20}$$

$$\mathbf{J}^k = \tfrac{1}{2}\epsilon^{ijk}J^{ij} = \epsilon^{ijk}\int d^3\mathbf{x}\left[A^{0i}(\partial_\mu A^{\mu j}) + A_\mu{}^j(\partial^0 A^{\mu i} + \partial^\mu A^{i0} + \partial^i A^{0\mu})\right] \tag{21}$$

Ahora resulta obvio que al aplicar las condiciones generalizadas de Lorentz (que son la version cuántica de las ecuaciones de Maxwell en el espacio-libre) nos lleva a la formulación de la ausencia de electromagnetismo. El campo Kalb-Ramond resultante es longitudinales (con helicidad h= 0). Todas las componentes del tensor de momento angular para este caso son iguales a cero.
Como $\tilde{F}_{\mu\nu}(\mathbf{p}) \sim mA_{\mu\nu}(\mathbf{p})$

$$A_{\mu\nu}(\mathbf{p}) = N\left[\epsilon^{(1)}_\mu(\mathbf{p})\epsilon^{(2)}_\nu(\mathbf{p}) - \epsilon^{(1)}_\nu(\mathbf{p})\epsilon^{(2)}_\mu(\mathbf{p})\right] \tag{22}$$

puede coincidir en casos particulares con las componentes longitudinales del tensor antisimétrico obtenido en [3] y [4] con cierta elección de normalización y de diferente base de spin. Con esto probamos nuevamente que para el campo tensorial antisimétrico $\mathbf{J} \sim \int d^3\mathbf{x}\,(\mathbf{E}\times\mathbf{A})$, que dice sobre no invariancia de norma de división en parte orbital y parte de spin, $A^\mu \to A^\mu + 1/e(\partial^\mu\chi)$. La invariancia de norma de Kalb-Ramond es diferente, $A^{\mu\nu} \to A^{\mu\nu} + \partial^\mu\chi^\nu - \partial^\nu\chi^\mu$.

5 Fotón - Notof.

Podemos notar que el límite sin masa de esta teoría contiene la teoría de Maxwell como caso particular. Mostramos que es posible definir varios limites sin masa para la teoría de Proca-Duffin-Kemmer, otra es la del notof de Ogievetskii-Polubarinov. Sin embargo, los problemas con propagadores de Feynman-Stueckelberg se mantienen al considerar al fotón y al notof en la teora PDK por separado. Las componentes transversales del campo ATS pueden ser removidas de su correspondiente Lagrangiano debido a las nuevas transformaciones de Kalb-Ramond.

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}^{Proca} + \mathcal{L}^{Notof} = -\frac{1}{8}F_\mu F^\mu - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{m^2}{2}A_\mu A^\mu + \frac{m^2}{4}A_{\mu\nu}A^{\mu\nu}, \tag{23}$$

El limite cuando $m \to 0$ debe ser tomado para invariantes dinámicas solo al final de los cálculos. Y entonces introdujeron [11] el segundo "fotón". En su notación el campo de compensación de 24-componentes (en general) $B_{\mu,\nu\lambda}$ se reduce al siguiente campo 4-vectorial.

$$B_{\mu,\nu\lambda} = \frac{1}{4}\epsilon_{\mu\nu\lambda\sigma}a_\sigma(x). \tag{24}$$

Como vimos recientemente después de la comparación de estas formulas con el trabajo de OHKR, el segundo "fotón" no es nada mas que el notof dentro de la selección de normalización.

6 El Tensor Simétrico.

Se obtiene la ecuación de segundo orden para tensores simétricos de segundo rango:

$$\frac{1}{m^2}\left[\partial_\nu\partial^\mu G_\kappa{}^\nu - \partial_\nu\partial^\nu G_\kappa{}^\mu\right] = G_\kappa{}^\mu. \tag{25}$$

Después de la contracción en los indices κ y μ la ecuación se reduce al conjunto de las ecuaciones:

$$\partial_\alpha G^\alpha{}_\kappa = F_\kappa \tag{26}$$
$$\frac{1}{m^2}\partial_\nu F^\nu = 0, \tag{27}$$

las ecuaciones que conectan los análogos del tensor energía momento y el 4-vector potencial.

7 Bosones de Espin 2.

El Lagrangiano más general invariante relativista para el tensor simétrico de segundo rango es

$$L = -\alpha_1(\partial^\alpha G_{\alpha\lambda})(\partial_\beta G^{\beta\lambda}) - \alpha_2(\partial_\alpha G^{\beta\lambda})(\partial^\alpha G_{\beta\lambda}) - \alpha_3(\partial^\alpha G^{\beta\lambda})(\partial_\beta G_{\alpha\lambda}) + m^2 G_{\alpha\beta}G^{\alpha\beta}. \tag{28}$$

que nos lleva a la ecuación

$$\left[\alpha_2(\partial_\alpha\partial^\alpha) + m^2\right]G^{\{\mu\nu\}} + (\alpha_1 + \alpha_3)\partial^{\{\mu|}(\partial_\alpha G^{\alpha|\nu\}}) = 0. \tag{29}$$

En el caso cuando $\alpha_2 = 1$ y $\alpha_1 + \alpha_3 = -1$ la coincide con Eq.(25). No existe ningún problema en obtener las invariantes dinámicas para los campos de spin 2 del Lagrangiano de arriba. Ahora presentamos las posibles interacciones relativistas del tensor simétrico de 2do rango. Las más simples deben ser las siguientes:

$$\mathcal{L}^{int}_{(1)} \sim G_{\mu\nu}F^\mu F^\nu, \tag{30}$$
$$\mathcal{L}^{int}_{(2)} \sim (\partial^\mu G_{\mu\nu})F^\nu, \tag{31}$$
$$\mathcal{L}^{int}_{(3)} \sim G_{\mu\nu}(\partial^\mu F^\nu). \tag{32}$$

El término $(\partial_\mu G^\alpha{}_\alpha)F^\mu$ desaparece debido a la restricción de la traza nula.
También es interesante notar que gracias a los posibles términos

$$V(F) = \beta_1(F_\mu F^\mu) + \beta_2(F_\mu F^\mu)(F_\nu F^\nu) \tag{33}$$

podemos darle masa a la G_{00} componente del campo de spin 2. Esto es debido a la posibilidad de que la simetría espontánea del Higgs se rompa de la siguiente manera:

$$F^\mu(x) = column(< v > + \partial_0\chi(x) \quad g^1 \quad g^2 \quad g^3) \tag{34}$$

con v siendo el valor esperado del vacío, $v^2 = (F_\mu F^\mu) = -\beta_1/2\beta_2 > 0$. Otros grados de libertad del 4-vector son removidos debido a que son los bosones de Goldstone. Como es usual, estos modos deben ser importantes para proveer masas a los tres bosones de norma. Esta expresión no permite una fase arbitraria para F^μ, la que es posible solamente si el 4-vector sea de variable complejo.

8 Conclusiones.

Dedujimos las ecuaciones gravitacionales del MCR. Las relaciones de esta teoría con la gravedad tensor-escalar han sido discutidas. Se le puso especial atención a las definiciones correctas del tensor energía-momento y a las corrientes de Noether en EM y TRG. Estimando interacciones concluimos que pueden ser vistas próximamente en experimentos.

Referencias
[1] A. O. Barut *Electrodynamics and Classical Theory of Fields and Particles* (Dover Publications, N.Y., 1980) [2] Lewis H. Ryder *Quantum Field Theory* (Cambridge University Press, UK, 2003) [3] D. V. Ahluwalia and D.J. Ernst, Int. J. Mod. Phys. E **2** (1993) 397. [4] V. V. Dvoeglazov, Int. J. Theor. Phys., First Online (Sept. 2014). [5] C.Itzykson and J. B. Zuber, *Quantum Field Theory.* (McGraw-Hill Book Co. New York, 1980). [6] V. V. Dvoeglazov, Phys. Scripta **64** (2001) 201, physics/9804010. [7] V. I. Ogievetskii and I. V. Polubarinov, Yadern. Fiz. **4** (1966) 216. [8] K. Hayashi. Phys. Lett. B**44** (1973) 497. [9] M. Kalb and P. Ramond, Phys. Rev. D**9** (1974) 2273. [10] D. Lurie, *Particles and Fields* (Interscience Publishers, 1968). Ch 1. [11] P. C. Naik and T. Pradhan. J. Phys. A**14** (1981) 2795. [12] P. Higgs. Phys. Rev. Lett. **13** (1964) 508.